Anwendung des „Satzes vom Maximum":

Fundamentalsatz der Algebra 9.10:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$

$$\Longrightarrow P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$ hat eine **Nullstelle** z_0 in $\mathbb{C}$

Idee: 1. Schritt: gute Kandidaten für Nullstellen von P sind **Minima** von

$$f := |P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

Wie findet man diese? zeige

$\exists R$ (groß): $$\boxed{\inf_{|z| \leq R} f = \inf_{\mathbb{C}} f}$$

denn außerhalb von $|z| \leq R$ wächst f von der Größenordnung R^n;

nach Satz 9.9. gibt es z_0 mit $|z_0| \leq R$ und

$$\inf_{|z| \leq R} f(z) = f(z_0),$$

also $\boxed{f(z_0) \leq f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}}$

2. Schritt: Zeige $\boxed{f(z_0) = 0} \Longrightarrow P(z_0) = 0$

indirekt durch längere Diskussion des Wachstums von f. $\square$

Grenzwerte von Funktionen

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

- die Frage, ob f in 1 stetig ist, macht keinen Sinn:
  1 gehört nicht zum Definitionsbereich!
- aber: sei (x_n) eine Folge, $x_n \neq 1$, mit $x_n \longrightarrow 1$ $\Longrightarrow$

$$f(x_n) = x_n + 1 \longrightarrow 2$$

insgesamt: $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) :=$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2, & x = 1 \\ f(x), & x \neq 2 \end{array}\right\}$$ ist stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$

Fortsetzungsproblem (allgemein):

$$\boxed{\begin{array}{l} D \subset \mathbb{C},\ f: D \to \mathbb{C} \text{ stetig}, \\ a \notin D \overset{?}{\Longrightarrow} \exists \text{ eine stetige} \\ \text{Funktion } \tilde{f}: D \cup \{a\} \to \mathbb{C} \\ \text{mit } \tilde{f} = f \text{ auf } D \end{array}}$$

?

Bem: ① Die Frage macht nur wirklich Sinn, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen a konvergiert!
(sonst setze $\tilde{f}(a) \in \mathbb{C}$ beliebig)

② im Falle einer <u>positiven</u> <u>Antwort</u> muss gelten:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \;\exists \text{ für } \underline{\text{jede}} \text{ Folge} \\ D \ni x_n \longrightarrow a \quad \text{und hängt } \underline{\text{nicht}} \\ \text{von der speziellen Folge ab}\end{array}}$$

klappt nicht bei z.B.

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

in $a = 0$

$\boxed{\text{Definition 9.3}}$: Sei $A \subset \mathbb{C}$. $a \in \mathbb{C}$ heißt ein <u>Häufungspunkt</u> <u>von A</u>, wenn eine (und damit alle) der folgenden <u>äquivalenten</u> Beschreibungen erfüllt ist:

(1.) $\exists$ Folge $x_n \in A$ mit

! $x_n \neq a$ und $x_n \longrightarrow a$

(2.) in jeder Umgebung $\mathcal{U}$ von a liegen ∞ viele Elemente von A

(3.) für jede Umgebung $\mathcal{U}$ von a gilt

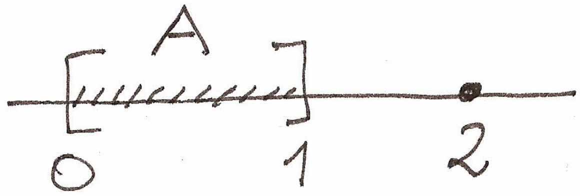
$$\mathcal{U} \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

<u>Beweis:</u> überlege: $\boxed{(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)}$

<u>Bem:</u> 1.) a kann – muss aber nicht ! – zu A gehören.

2.) $A = (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ [a,b]$

$\Longrightarrow [a,b] =$ Menge aller H.P. von A

3.) 

2 kein H.P. von A

4.) endliche Mengen haben keine H.P.,
ebensowenig $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$

5.) $\boxed{\mathbb{R} = \text{Menge aller H.P. von } \mathbb{Q}}$

6.) „Fortsetzungsproblem" nur interessant, „wenn" a H.P. des Definitionsbereiches

Def. 9.4. **Grenzwerte von Funktionen**

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ (nicht notwendig stetig) und a ein H.P. von D.

$b \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert von f bei $x \to a$, i.Z.

$$\boxed{b = \lim_{x \to a} f(x),}$$

falls $b = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, $\boxed{x_n \neq a}$

Beispiele : $\boxed{D := (-1,1) - \{0\},\ a := 0}$

① $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$, $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$

existieren nicht : betrachte

$x_n := \frac{1}{n}$ bzw. $x_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

bzw. $x_n := \frac{1}{\frac{n}{2}\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

② $\alpha > 0 \implies \lim_{x \to 0} |x|^\alpha = 0.$

③ $\boxed{\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(1/x) = 0}$:

$$„x_n \to 0" \Longrightarrow \left| x_n \cdot \sin(1/x_n) \right| \leq |x_n| \to 0$$

④ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^x - 1) = 1}$

$\left(\text{d.h.: } \boxed{\frac{d}{dx|_0} e^x = 1} \right)$

beachte die in Satz 8.4 $\underbrace{}_{(2),(3)}$ bewiesenen Ungleichungen

$$(*)\begin{cases} 1 \leq \frac{1}{x}(e^x - 1) \leq \frac{1}{1-x}, & x \in (0,1), \\ \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{x}(e^x - 1) \leq 1, & x \in (-1,0) \end{cases}$$

(genauer: gezeigt $1 + x \leq e^x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$,

$e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$;

(*) folgt daraus)

3 Standardbeschreibungen für Grenzwerte

$\boxed{\text{Satz } 9.11 - 9.13}$: Sei $a \in \mathbb{C}$ ein H.P. von $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann existiert

$$b := \lim_{z \to a} f(z),$$

wenn eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

a) Im Fall $\boxed{a \in D}$ kann man f im Punkt a ggf.* $\boxed{\text{stetig abändern}}$. Falls $\boxed{a \notin D}$, so lässt sich f in a stetig fortsetzen.

(*: unnötig, wenn f in a stetig ist!)

b) (ε-δ Beschreibung)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|f(z) - b| < \varepsilon$

für alle $z \in D$, $z \neq a$, $|z - a| < \delta$.

c) (Cauchy-Kriterium)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$

für alle $z, w \in D - \{a\}$, $|z - a| < \delta$, $|w - a| < \delta$.

Ein Beispielbeweis: $\boxed{c) \Longrightarrow \lim\limits_{z \to a} f(z) \ \exists}$

Sei (z_n) eine Folge in $D - \{a\}$, $z_n \longrightarrow a$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, berechne δ gemäß c)

$\Longrightarrow |z_n - a| < \delta$, $|z_m - a| < \delta$

für $n, m \geq N$ mit $N = N_\delta$ passend

$\overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow} \quad |f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N_\delta$

$\Longrightarrow \quad (f(z_n))$ ist C.F.

$\Longrightarrow \quad b := \lim_{n \to \infty} f(z_n) \ \exists$ ($\mathbb{C}$ vollständig!)

benutze c) erneut, um Unabhängigkeit von b von der speziellen Folge zu zeigen.

$\square$

Bspl: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Hier hat man f offenbar „in 0 falsch definiert": Es ist nämlich

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 0,$$

und dies entspricht der stetigen Abänderung von f in 0.

Stetige Fortsetzbarkeit

Frage: Wohin will man $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig fortsetzen?

Def. 9.5: a) Es sei

$\overline{D} := D \cup$ Menge aller H.P. von D

Abschluss von D (abgeschlossene Hülle).

b) D heißt abgeschlossen $:\Longleftrightarrow \overline{D} = D$.

Bspl: 1.) $\overline{(a,b)} = [a,b] \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$

2.) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

3.) $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$

Man kann aber nicht immer stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen:

$f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$

ist stetig auf $D := (0,1)$, aber nicht stetig fortsetzbar auf $\overline{D} = [0,1]$. Was braucht man an Zusatzinfo über f?

$\boxed{\text{Def. 9.6}}$: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt auf $D \subset \mathbb{C}$ **gleichmäßig stetig** $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ für alle $z, w \in D$ mit $|z - w| < \delta$.

Bem: 1.) f (glm.) stetig auf $D \Longrightarrow f$ stetig auf D

2.) glm. stetig $\hat{=}$ δ hängt nicht „vom Punkt ab"

3.) $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) := \frac{1}{x}$, nicht glm stetig auf $(0,1)$

Wähle $x := \frac{1}{n}$, $y := \frac{2}{n}$, $n \geq 2 \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x) - f(y)| = \left| n - \frac{n}{2} \right| = \frac{n}{2} \longrightarrow \infty \\ \qquad\qquad\quad \underline{\text{und}} \\ |x-y| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{bei } n \to \infty. \end{array} \right.$$

4.) $\boxed{f: D \to \mathbb{C} \text{ Lipschitz} \Longrightarrow f \text{ glm stetig auf } D}$

(„$\delta = \varepsilon / L$")

$\square$

Mit den neuen Begriffen gilt

$\boxed{\text{Satz 9.14}}$: Ist $f: D \to \mathbb{C}$ glm. stetig, so kann man f in eindeutiger Weise stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen.

Diese Fortsetzung ist sogar glm. stetig

Beweis (Details Übungsaufgabe)

1.) <u>Eindeutigkeit</u>:

Seien $\overline{f_1}, \overline{f_2} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetige Fortsetzungen von $f : D \to \mathbb{C}$. Sei $a \in \overline{D} - D$.

$\Longrightarrow \exists\, a_n \in D$ mit $a_n \to a$.

Die Stetigkeit von $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ liefert:

$$\left.\begin{array}{ccc} \overline{f_1}(a_n) & \longrightarrow & \overline{f_1}(a) \\ \| & & \\ f(a_n) & & \\ \| & & \\ \overline{f_2}(a_n) & \longrightarrow & \overline{f_2}(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{f_1}(a) = \overline{f_2}(a)$$

2.) <u>Existenz</u>: Setze $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$

$$\overline{f}(a) := \begin{cases} f(a), & a \in D \\ \lim\limits_{z \to a} f(z), & a \in \overline{D} - D \end{cases}$$

Begründe z.B. mit Cauchy-Bedingung die

Existenz von $\lim_{z \to a} f(z)$. $\square$

Bei <u>kompaktem</u> Definitionsbereich D macht die Fortsetzungsfrage <u>keinen</u> <u>Sinn</u>, denn

$\boxed{\text{Satz 9.16}}$: $\boxed{D \subset \mathbb{C} \text{ kompakt} \iff D \text{ beschränkt und abgeschlossen}}$

Beweis: „$\Longrightarrow$" Sei D kompakt.

Gezeigt: D beschränkt

Noch zu zeigen: $\overline{D} = D$

Annahme: $\overline{D} \supsetneqq D$

Wähle $a \in \overline{D} - D \xrightarrow[\text{H.P.}]{\text{Def}} \exists\, a_n \in D$

mit $a_n \longrightarrow a$;

D kompakt $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge (a_n'),

die Limes in D hat;

gemäß $a_n' \longrightarrow a$ folgt ein Wspr.!

"$\Longleftarrow$": klar mit Bolzano-W.

("jede Folge aus D hat eine in D konvergente Teilfolge") als Beschreibung für Kompaktheit $\square$

Außerdem ~~[illegible]~~ hat man auf kompaktem Definitionsbereich stets glm. Stetigkeit

$\boxed{\text{Satz 9.15}}$: $f: D \to \mathbb{C}$ stetig, D kompakt $\Longrightarrow$ f glm. stetig

Beweis (Übung): indirekt ✓ f nicht glm. stetig

$\Longrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ findet man $z, w \in D$ mit $|z-w| < \delta$, aber

$$|f(z)-f(w)| \geq \varepsilon$$

speziell: $\delta = 1/n \rightsquigarrow z_n, w_n \in D, |z_n - w_n| < 1/n,$

$$(*)\ |f(z_n)-f(w_n)| \geq \varepsilon;$$

D kompakt $\Longrightarrow \exists\ z_n', z_0 \in D: z_n' \longrightarrow z_0$

offenbar: 1.) $w_n' \longrightarrow z_0$

2.) $f(z_n'), f(w_n') \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z_0)$

(da f stetig)

nun führt 2.) offenbar auf einen Widerspruch

zu $(*)$.

$\square$

§10 Spezielle Klassen reeller Funktionen

Monotone Funktionen sind i.a. unstetig, allerdings existieren sogenannte einseitige Limiten.

Def 10.1: Sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ mit

$$-\infty \leq \alpha < \beta \leq -\infty$$

(a) Sei $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Man setzt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0-) &:= \lim_{x \to x_0} f\big|_{(\alpha, x_0)} \\ f(x_0+) &:= \lim_{x \to x_0} f\big|_{(x_0, \beta)} \end{aligned}}$$

sofern die Limiten rechts gemäß Def. 9.4 existieren. (als reelle Zahlen)

(Man könnte hier auch x_0 aus dem Definitionsbereich herausnehmen !)

Bem: 1.) andere Schreibweisen

$$f(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x), \; f(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

2.) klar: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert} \iff \text{die einseitigen Limiten existieren und sind gleich}}$

3.) x_0 Sprungstelle $:\iff$ $f(x_0\pm)$ existieren und sind $\neq$

~~4.) falls $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha+) := \ldots$~~

~~— " — $\beta \in \mathbb{R}$: $f(\beta-) := \ldots$~~

~~falls existent~~

(b) Sei $\boxed{\beta = +\infty.}$

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiert (in $\mathbb{R}$) $:\iff$

für jede Folge $x_n \in (\alpha, \infty)$ mit $x_n \to \infty$ existiert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ (in $\mathbb{R}$) und ist unabhängig von (x_n)

Z.B.: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $(\alpha, \beta) := (0, \infty)$

(c) Sei $\alpha = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existiert (in $\mathbb{R}$) $:\Longleftrightarrow$ ......

(d) Sei $x_0 \in [\alpha, \beta]$, also u.U. $\pm\infty$.

(uneigentliche Limiten)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad :\Longleftrightarrow \\ f(x_n) \to \pm\infty \text{ für jede Folge } x_n \in \\ (\alpha, \beta), \; x_n \to x_0 \end{array} \right.$$

(e) Sei $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Man definiert dann noch:

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

als <u>einseitige uneigentliche Grenzwerte</u>.

Hierbei kann man x_0 auch aus dem Def.bereich entfernen.

<u>Zum Beispiel:</u>

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = e;$$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \pi/2;$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{|x|} = -1.$$